UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215467 0

QA
565
C514

OF
NTO
ARY

Sur les Courbes planes dont les coordonnées sont fonctions rationnelles d'un paramètre,

par

A. Clebsch,

(Journal de Crelle, T. 64, p. 43)

traduit par

A. Durand,

Ancien Élève de l'École Normale Supérieure,
Agrégé de l'Université.

47611
23/2/60

Paris
Librairie scientifique A. Hermann,
Libraire de S. M. le Roi de Suède et de Norwège,
8, Rue de la Sorbonne.
1894.

QA
565
C514

Sur les courbes planes dont les coordonnées sont fonctions rationnelles d'un paramètre.

Le genre des intégrales abéliennes qui sont attachées à une courbe plane du $n^{ième}$ degré est égale au nombre :

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

quand la courbe ne possède ni points doubles ni points de rembroussements ; j'ai donné dans le $63^{ème}$ volume de ce journal (page 189) une série de résultats, qui s'appuient sur cette remarque. J'ai pour cela employé principalement ce théorème, que les sommes de certaines intégrales abéliennes sont toujours nulles, pourvu que leurs limites forment une série de points de la courbe donnée constituant l'intersection complète de cette courbe et d'une autre courbe algébrique.

Mais si la courbe a des points doubles ou des points de rebroussement, alors la valeur de p s'abaisse suivant le nombre de ces points singuliers [1], et les intégrales mentionnées, se réduisent en partie à des intégrales de genre inférieur, et en partie aussi à des intégrales de troisième espèce : la conséquence la plus importante pour les recherches qui vont suivre, — c'est qu'entre les modules de périodicité des intégrales modifiées se présentent des relations linéaires et il résulte de ce fait des réductions pour les nombres de solutions possibles des problèmes traités antérieurement ; nombres que j'ai donnés à l'endroit cité.

Au lieu de partager les courbes algébriques d'après leur degré, et d'introduire des subdivisions d'après le nombre des points doubles et des points de rebroussement qu'elles présentent, on peut les caractériser d'après le nombre p. (Genre) ; au genre zéro, appartiendront donc les courbes pour lesquelles $p = 0$; au genre un celle pour lesquelles $p = 1$; ainsi de suite : alors les degrés des courbes se présentent comme subdivisions des genres ; effectivement, dans chaque genre donné p, il existe des courbes d'un degré quelconque, supérieur au nombre positif n vérifiant la relation $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

En particulier si l'on prend le degré égal à la valeur limite n supposée entière, la courbe est la plus générale du $n^{ième}$ degré, c'est à dire celle qui n'a ni points doubles ni points de rebroussement.

Les courbes appartenant au même genre, comme on l'a montré à

---

[1] (Note) δ et ρ désignant respectivement les nombres des points doubles et des points de rebroussement, le genre p est $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - \rho$.

l'endroit cité, peuvent être aussi définies par cette propriété des coordonnées homogènes de leurs points d'être exprimables en fonctions rationnelles entières de 2 paramètres S, Z reliés par une relation algébrique

$$f(S,Z) = 0$$

qui définit une classe correspondante de fonctions abéliennes.

En particulier, pour $p=0$, on peut exprimer S en fonction rationnelle de Z ; pour $p=1$; cette expression de S contient un radical carré portant sur une expression du 3e ou 4e degré.

Dans cette note je m'occuperai du genre, $p=0$; dans ce cas le nombre des points doubles et des points de rebroussement est le plus élevé qui soit compatible avec le degré ; Ces courbes ont été étudiées par M. Salmon dans son "Traité des courbes planes d'ordre supérieur". J'en donnerai quelques propriétés nouvelles.

Quand une courbe de degré n possède $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles, on peut exprimer les coordonnées en fonction rationnelle d'un paramètre: C'est ce que l'on voit de la manière suivante: les points doubles et

$$\frac{h(h+3)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

autres points de la courbe, déterminent complètement si $h < n$ une courbe de degré h.

Pour que ces points tous ensemble forment l'intersection des deux courbes, il faut que :

$$\frac{h(h+3)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = hn.$$

c'est à dire $h = n-1$, ou $h = n-2$.

Ainsi, si l'on fait passer un faisceau $u + \lambda v = 0$ de courbes de degré $n-1$ par les points doubles, et par $2n-3$ autres points fixes de la courbe donnée, chaque courbe du système coupe la courbe donnée en un seul point variable : on doit donc pouvoir exprimer les coordonnées de ce point en fonction rationnelle de λ.

Faisons de même passer un faisceau $u + \lambda v = 0$, de courbes du degré $(n-2)$ par les points doubles, et par $n-3$ points fixés de la courbe donnée; alors chaque courbe du faisceau ne coupe plus la courbe donnée qu'en un seul point variable, dont les coordonnées doivent pouvoir s'exprimer en fonction rationnelle de λ,

Ainsi la représentation peut être obtenue de deux manières différentes, dans chaque cas.

§1.

Singularités des Courbes dont les coordonnées sont exprimables en fonctions rationnelles d'un paramètre.

Considérons une courbe dont les coordonnées homogènes s'expriment par les égalités :

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= f_1 \quad (\lambda,\mu) \\ x_2 &= f_2 \quad (\lambda,\mu) \\ x_3 &= f_3 \quad (\lambda,\mu) \end{aligned}$$

où x_1, x_2, x_3 sont des fonctions entières homogènes de degré n de λ et de μ, qui ne peuvent pas s'exprimer comme fonctions homogènes de degré moins élevé, de deux nouveaux paramètres, qui seraient eux-mêmes des fonctions rationnelles entières, homogènes de λ et μ.

A tout point de la courbe correspond alors une certaine valeur du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ et en général aussi une seule

On peut toujours supposer les 3 fonctions $f_1\ f_2\ f_3$ débarrassées d'un facteur commun.

La courbe est alors de degré n, car toute droite :

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

la coupe aux n points dont les paramètres sont les racines de l'équation du degré n.

$$(2)\qquad u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3 = 0$$

Pour avoir l'équation de la courbe en coordonnées lignes, formons le discriminant de (2), ce qui revient à éliminer λ et μ entre les deux équations :

$$(3)\cdot\qquad \begin{cases} u_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda} + u_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda} + u_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda} = 0 \\ u_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial \mu} + u_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial \mu} + u_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial \mu} = 0 \end{cases}$$

Ce discriminant est en général du degré $2(n-1)$ et par suite la courbe, en général de la classe $2(n-1)$

Mais en particulier, il peut exister des valeurs de λ et μ telles que :

$$(4)\qquad \begin{cases} \ell \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda} = m \dfrac{\partial f_1}{\partial \mu} = \alpha_1 \\ \ell \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda} = m \dfrac{\partial f_2}{\partial \mu} = \alpha_2 \\ \ell \dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda} = m \dfrac{\partial f_3}{\partial \mu} = \alpha_3 \end{cases}$$

le discriminant doit alors nécessairement contenir en facteur :

$$u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 ,$$

car si cette quantité est nulle, les équations 2 sont satisfaites.

$a_1 a_2 a_3$ sont d'après les équations (1) les coordonnées correspondant à cette valeur particulière $\frac{\lambda}{\mu}$ du paramètre.

Si les équations (4) admettent χ solutions, la classe de la courbe est $2(n-1) - \chi$.

Des équations (3) on déduit les expressions de $u_1 u_2 u_3$ (coordonnées lignes), en fonction de λ et μ, analogues à celles des coordonnées points, (équations 1)

$$(5) \quad \begin{cases} \rho u_1 = \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda} \dfrac{\partial f_3}{\partial \mu} - \dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda} \dfrac{\partial f_2}{\partial \mu} , \\ \rho u_2 = \dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda} \dfrac{\partial f_1}{\partial \mu} - \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda} \dfrac{\partial f_3}{\partial \mu} , \\ \rho u_3 = \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda} \dfrac{\partial f_2}{\partial \mu} - \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda} \dfrac{\partial f_1}{\partial \mu} , \end{cases}$$

ρ étant un facteur de proportionnalité, de telle sorte que l'équation de la tangente est :

$$(6) \quad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial \mu} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \mu} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0 ,$$

Cette expression devient indéterminée si λ et μ forment une solution du système (4).

Mais si dans l'équation (6), que nous désignerons pour le moment par $\Omega = 0$, on divise d'abord les coefficients par l'un d'eux, les autres coefficients prennent alors la forme $\frac{0}{0}$, et alors, en appliquant la règle usuelle et différentiant, soit par rapport à λ soit par rapport à μ, puis multipliant de nouveau par le dénominateur réduit, on trouve l'équation de la tangente sous la forme :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = 0 , \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = 0 ,$$

ou bien, en représentant par p et q deux coefficients arbitraires sous la forme définitive :

$$p \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} + q \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = 0 .$$

L'expression explicite de cette équation est :

$$0 = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ p\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda^2} + q\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda\partial\mu} & p\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda^2} + q\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda\partial\mu} & p\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda^2} + q\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda\partial\mu} \\ p\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda\partial\mu} + q\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\mu^2} & p\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda\partial\mu} + q\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\mu^2} & p\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda\partial\mu} + q\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\mu^2} \end{vmatrix}$$

ou, ce qui n'en diffère pas :

$$0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda^2} & q^2 \\ \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda\partial\mu} & -pq \\ \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\mu^2} & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\mu^2} & \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\mu^2} & p^2 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0. \end{vmatrix}$$

Maintenant on peut donner aux équations (4) la forme

$$(7)\quad \begin{cases} l\lambda\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda^2} + (l\mu - m\lambda)\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda\partial\mu} - m\mu\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\mu^2} = 0 \\ l\lambda\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda^2} + (l\mu - m\lambda)\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda\partial\mu} - m\mu\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\mu^2} = 0 \\ l\lambda\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda^2} + (l\mu - m\lambda)\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda\partial\mu} - m\mu\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\mu^2} = 0. \end{cases}$$

De là résulte d'abord que les valeurs $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ dont il est question annulent le déterminant :

$$(8)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\mu^2} \\ \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\mu^2} \\ \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\mu^2} \end{vmatrix}$$

et secondement que l'on peut toujours déterminer 3 quantités $r_1\ r_2\ r_3$ telles que :

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Delta}{\partial\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda^2}} = l\lambda r_1, \\ \dfrac{\partial\Delta}{\partial\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda\partial\mu}} = (l\mu - m\lambda) r_1 \\ \dfrac{\partial\Delta}{\partial\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\mu^2}} = -m\mu\, r_1. \end{cases}$$

Grâce à l'introduction de ces quantités nous arrivons finalement, en négligeant un facteur $(p\lambda - q\mu)(pl + qm)$ sans importance, à obtenir l'équation de la tangente en un tel point sous la forme :

$$(10) \qquad r_1 X_1 + r_2 X_2 + r_3 X_3 = 0 .$$

Nous appelons point double de la courbe un point pour lequel deux systèmes de valeurs (λ, μ), $(\lambda' \mu')$ donnent les mêmes valeurs pour les coordonnées.

On a donc pour ces points :

$$(11) \qquad \begin{cases} K f_1(\lambda,\mu) = K' f_1(\lambda',\mu'), \\ K f_2(\lambda,\mu) = K' f_2(\lambda',\mu'), \\ K f_3(\lambda,\mu) = K' f_3(\lambda',\mu'). \end{cases}$$

Posons maintenant :

$$(12) \qquad \frac{f_2(\lambda,\mu) f_3(\lambda',\mu') - f_3(\lambda,\mu) f_2(\lambda',\mu')}{\lambda\mu' - \lambda'\mu} = \Phi_1(\lambda,\mu,\lambda',\mu')$$

et ainsi de suite.

Dans ces expressions Φ_1, Φ_2, Φ_3 sont des fonctions symétriques des couples de valeurs (λ,μ) (λ',μ'), fonctions homogènes d'ailleurs, et de degré $n-1$ par rapport à chacun des couples ; nous avons donc identiquement

$$(13) \qquad \begin{cases} \Phi_1 f_1(\lambda,\mu') + \Phi_2 f_2(\lambda,\mu) + \Phi_3 f_3(\lambda,\mu) = 0 \\ \Phi_1 f_1(\lambda',\mu') + \Phi_2 f_2(\lambda',\mu) + \Phi_3 f_3(\lambda',\mu') = 0 \end{cases}$$

Si par exemple entre Φ_1 et Φ_2 on élimine λ' et μ' on obtient une équation de degré $2(n-1)^2$ en $\frac{\lambda}{\mu}$.

Soit $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ une solution de cette équation et $\left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)$ la valeur correspondante de $\frac{\lambda'}{\mu'}$; 2 cas peuvent se présenter : ou bien ces valeurs annulent aussi Φ_3, et nous avons un point double ; ou bien $f_3(\lambda,\mu)$, $f_3(\lambda',\mu')$ sont nulles, et la solution obtenue ne répond pas à la question : en réalité, si $f_3(\lambda,\mu)$ est nul, ainsi que $f_3(\lambda',\mu')$, les équations (12) montrent qu'on a aussi $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ excepté si $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda'}{\mu'}$.

On trouve donc ainsi $n(n-1)$ solutions des équations $\Phi_1 = 0$ $\Phi_2 = 0$, qui ne répondent pas à la question, et il ne reste que $(n-1)(n-2)$ valeurs de $\frac{\lambda}{\mu}$, qui correspondent à des points doubles : cela fait donc $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles de la courbe, comme cela était évident à priori, à cause de la valeur du nombre p.

L'élimination de $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda'}{\mu'}$ entre les équations $\Phi_1 = 0$ $\Phi_2 = 0$ doit

d'après ce qui vient d'être dit, conduire premièrement à une équation de la forme :

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = F\left(\frac{\lambda}{\mu}\right),$$

puis à l'équation finale

$$[f_3(\lambda,\mu)]^{m-1} \cdot \psi(\lambda,\mu) = 0,$$

où $\psi = 0$ est l'équation cherchée du degré $(n-1)(n-2)$; mais pour résoudre cette équation il suffit d'en résoudre une autre du degré $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$: car outre la valeur $\frac{\lambda}{\mu}$ qui satisfait à cette équation, on a aussi la solution $\frac{\lambda'}{\mu'} = F\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$, où $\frac{\lambda'}{\mu'}$ correspond au même point double que $\frac{\lambda}{\mu}$. On a donc aussi nécessairement :

$$\frac{\lambda}{\mu} = F\left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)$$

et la résolution de l'équation $\psi = 0$ peut par conséquent, d'après Abel, être ramenée à celle d'une équation de degré $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, et de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations du second degré.

Je vais maintenant rechercher dans quelles circonstances le point double devient un point de rebroussement :

Dans ce cas l'équation (6) de la tangente doit être la même quelle que soit celle des branches se coupant au point double que l'on considère : on doit donc avoir :

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\frac{\partial f_2}{\partial \mu} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\frac{\partial f_3}{\partial \mu}\right) = m\left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda'}\frac{\partial f_3}{\partial \mu'} - \frac{\partial f_3}{\partial \lambda'}\frac{\partial f_2}{\partial \mu'}\right)$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda}\frac{\partial f_1}{\partial \mu} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\frac{\partial f_3}{\partial \mu}\right) = m\left(\frac{\partial f_3}{\partial \lambda'}\frac{\partial f_1}{\partial \mu'} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda'}\frac{\partial f_3}{\partial \mu'}\right)$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\frac{\partial f_2}{\partial \mu} - \frac{\partial f_2}{\partial \lambda}\frac{\partial f_1}{\partial \mu}\right) = m\left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda'}\frac{\partial f_2}{\partial \mu'} - \frac{\partial f_2}{\partial \lambda'}\frac{\partial f_1}{\partial \mu'}\right)$$

(il faut, dans le premier membre regarder $f_1\ f_2\ f_3$ comme fonctions de λ, μ et dans le second membre comme fonctions de λ', μ')

De ces équations résulte :

$$(11) \qquad -\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda'} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda'} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \lambda'} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu'} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu'} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mu'} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Mais ces équations expriment simplement que $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ et $\frac{\lambda'}{\mu'}$ sont racines doubles de l'équation dont dépendent les paramètres des points doubles. On le voit tout de suite en établissant la condition pour que les équations (11) soient vérifiées non seulement par:

$$K, K', \lambda, \mu, \lambda', \mu',$$

mais aussi par

$$K + dK, \quad K' + dK', \quad \lambda + d\lambda, \mu, \lambda' + d\lambda', \mu',$$

et aussi pour

$$K + dK, \quad K' + dK', \quad \lambda, \mu + d\mu, \lambda', \mu' + d\mu'.$$

Il nous faut alors distinguer 2 cas: Premièrement, ou bien $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda'}{\mu'}$ peuvent être deux racines doubles différentes, ou secondement $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda'}{\mu'}$ peuvent être égaux et représenter le couple de racines égales.

Dans le 1er cas on n'a pas de point de rebroussement, mais 2 points doubles infiniment voisins, de telle sorte que les tangentes coïncident. Ceci exige 2 relations entre les coefficients et n'introduit aucune autre réduction de la classe que celle qui résulte de l'existence des deux points doubles. Dans le second cas au contraire on a bien un point de rebroussement et une réduction de la classe.

Si en effet $\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda}{\mu} + \varepsilon$ et si ε tend vers 0, les équations (14) se réduisent à l'équation unique:

$$\Delta = 0$$

Il n'y a donc en réalité qu'une condition nécessaire. En même temps les équations (11) se réduisent aux équations (2). Les λ points considérés plus haut pour lesquels il y a réduction de la classe coïncident en réalité avec les points de rebroussement.

Non seulement Δ lui-même s'annule pour tout point de rebroussement, mais aussi sa dérivée de telle sorte que le paramètre d'un point de rebroussement est toujours racine double de $\Delta = 0$

Or on a:

$$d\Delta = \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} d\mu$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda^2}\right)} d\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda^2}\right) + \frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda \partial \mu}\right)} d\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda \partial \mu}\right) + \frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \mu^2}\right)} d\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \mu^2}\right) \right)$$

ou encore d'après (9):

$$= \Sigma_i r_i \left\{ l\lambda\, d\, \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda^2} + (l\mu - m\lambda)\, d\, \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda \partial \mu} - m\mu\, d\, \frac{\partial^2 f_i}{\partial \mu^2} \right\}$$

$$= (n-2)\ \Sigma_i r_i \left(l\, d\,\frac{\partial f_i}{\partial \lambda} - m\, d\,\frac{\partial f_i}{\partial \mu}\right).$$

Mais cette expression est nulle car d'après (8) et (9) nous avons:

$$\begin{cases} \Sigma\ r_i\ \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda^2} = 0 \\ \Sigma\ r_i\ \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda\, \partial \mu} = 0 \\ \Sigma\ r_i\ \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial \mu^2} = 0 \end{cases}$$

Ces considérations auront de l'importance pour la détermination des points d'inflexion.

Si $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda'}{\mu'}, \frac{\lambda''}{\mu''}$ sont les paramètres de 3 points de la courbe situés sur une ligne droite, ces paramètres doivent satisfaire à la relation:

$$(15)\qquad \begin{cases} \Delta = \begin{vmatrix} f_1(\lambda\mu) & f_1(\lambda'\mu') & f_1(\lambda''\mu'') \\ f_2(\lambda\mu) & f_2(\lambda'\mu') & f_2(\lambda''\mu'') \\ f_3(\lambda\mu) & f_3(\lambda'\mu') & f_3(\lambda''\mu'') \end{vmatrix} \\ \quad \div (\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')(\lambda''\mu-\mu''\lambda)(\lambda\mu'-\mu\lambda') \\ = \Psi(\lambda,\mu;\lambda',\mu';\lambda'',\mu''). \end{cases}$$

Pour un point d'inflexion cette équation est satisfaite par des valeurs de $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda'}{\mu'}, \frac{\lambda''}{\mu''}$ infiniment peu différentes, et comme en même temps l'équation (15) se réduit à

$$\frac{\Delta}{\Psi} = 0.$$

c'est l'équation $\Delta = 0$ qui donne les points d'inflexion. Donc:

Le nombre des points d'inflexion est en général $3(n-2)$.

Mais nous avons montré que le paramètre d'un point de rebroussement est racine double de $\Delta = 0$, donc: Si $\varkappa$ points doubles deviennent des points de rebroussement le nombre des points d'inflexion qui restent est:

$$3(n-2) - 2\varkappa.$$

Ce nombre donne une limite supérieure du nombre de points de rebroussement qu'une courbe peut posséder. Car on voit que le nombre des points de rebroussement d'une courbe de degré n ne peut jamais surpasser $\frac{3}{2}(n-2)$.

Il semble que cette limite, ou du moins le plus grand entier qui lui est inférieur, puisse être réellement atteinte; cela a lieu tout au moins pour les courbes du 3ème et du 4ème degré.

Les points de contact des tangentes que l'on peut mener d'un point extérieur à la courbe se trouvent, d'après l'équation (6) au moyen d'une équation du degré $2n-2$ en $\frac{\lambda}{\mu}$.

Mais si dans l'équation (6) X est un point de la courbe, et si nous désignons ses paramètres par $\lambda_0 \mu_0$, (en désignant aussi par l'indice $_0$ les valeurs de $f_1, f_2 f_3$ pour $\lambda = \lambda_0$ $\mu = \mu_0$, alors l'équation (6) devient

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} f_1^0 & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ f_2^0 & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ f_3^0 & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0$$

équation qui est divisible par $(\lambda_0 \mu - \mu_0 \lambda)^2$ et identique avec

$$0 = (\lambda \mu_0 - \lambda_0 \mu)^2 \ \Psi (\lambda, \mu; \lambda_0 \mu_0; \lambda_0, \mu_0)$$

en supprimant le 1er facteur, il reste l'équation du degré $2n-4$.

$$(17) \qquad \Psi (\lambda, \mu; \lambda_0 \mu_0; \lambda_0, \mu_0),$$

elle donne les points de contact des $(2n-4)$ tangentes que l'on peut mener à la courbe de l'un de ses points λ_0, μ_0.

Mais cette équation (16) est satisfaite par les valeurs de λ, μ qui vérifient les équations (4). Donc le nombre des véritables tangentes est seulement $2n-3-\chi$.

En particulier si le point λ_0, μ_0 de la courbe est un point d'inflexion nous avons:

$$\psi (\lambda_0, \mu_0; \lambda_0, \mu_0; \lambda_0, \mu_0) = 0$$

alors l'équation (17) admet encore la racine $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ et le nombre des tangentes véritables est seulement $2n-3-\chi$.

Si maintenant le point est un point double de la courbe, et si $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est l'autre valeur du paramètre correspondant au même point double de la courbe, on peut dans l'équation (16) au lieu de f_i^0 mettre f_i^1, et $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est par conséquent racine double de l'équation (16). Donc d'un point double, on peut mener à la courbe $2n-6-\chi$ tangentes.

Si, enfin le point de la courbe est un point de rebroussement, alors $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ est une racine quadruple de l'équation (16). Si l'on forme en effet par exemple la dérivée $3^{\text{ème}}$ par rapport à λ du 1er membre de

l'équation (16) on obtient :

$$\begin{vmatrix} f_3^0 & \frac{\partial^4 f_1}{\partial \lambda^4} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ f_2^0 & \frac{\partial^4 f_2}{\partial \lambda^4} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ f_3^0 & \frac{\partial^4 f_3}{\partial \lambda^4} & \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} f_1^0 & \frac{\partial^3 f_1}{\partial \lambda^3} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda \partial \mu} \\ f_2^0 & \frac{\partial^3 f_2}{\partial \lambda^3} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda \partial \mu} \\ f_3^0 & \frac{\partial^3 f_3}{\partial \lambda^3} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda \partial \mu} \end{vmatrix}$$

$$+3 \begin{vmatrix} f_1^0 & \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^3 f_1}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \\ f_2^0 & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^3 f_2}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \\ f_3^0 & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^3 f_3}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1^0 & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial^4 f_1}{\partial \lambda^3 \partial \mu} \\ f_2^0 & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial^4 f_2}{\partial \lambda^3 \partial \mu} \\ f_3^0 & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial^4 f_3}{\partial \lambda^3 \partial \mu} \end{vmatrix}$$

De ces déterminants le premier et le dernier s'annulent pour $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda_0}{\mu_0}$ en vertu des équations (4), et dans la même hypothèse on mettra la somme des deux autres sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda \partial \mu} \\ f_2 & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda \partial \mu} \\ f_3 & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda \partial \mu} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda \partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda \partial \mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda \partial \mu} \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{n \cdot n-1} \quad \frac{\partial \cdot \lambda^n \Delta}{\partial \lambda} \right) \quad \lambda = \lambda_0 \; , \mu = \mu_0 \; .$$

quantité qui, d'après ce qu'on a vu, s'annule aussi pour un point de rebroussement. Les dérivées première et seconde du premier membre de (16) sont nulles aussi pour $\lambda = \lambda_0 \; \mu = \mu_0$: on le voit d'une manière analogue et plus facilement encore

Donc $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ est bien dans ce cas une racine quadruple : mais cette racine est déjà comptée une fois dans les χ racines correspondant au point de rebroussement et que nous avons retranchées, donc le nombre de tangentes que l'on peut mener d'un point de rebroussement est $2n-5-\chi$

Il ne nous reste plus qu'à rechercher les tangentes doubles.

Si $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ sont les paramètres de leurs points de contact, alors, d'après (16) et (17) nous avons les 2 équations :

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{(\lambda\mu_0-\lambda_0\mu)^2}\begin{vmatrix} f_1^0 & \dfrac{\partial f_1}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial f_1}{\partial\mu} \\ f_2^0 & \dfrac{\partial f_2}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\mu} \\ f_3^0 & \dfrac{\partial f_3}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial f_3}{\partial\mu} \end{vmatrix} = -n\,\Psi^r(\lambda,\mu;\lambda,\mu;\lambda_0,\mu_0). \\ \dfrac{1}{(\lambda\mu_0-\lambda_0\mu)^2}\begin{vmatrix} f_1 & \dfrac{\partial f_1^0}{\partial\lambda_0} & \dfrac{\partial f_1^0}{\partial\mu_0} \\ f_2 & \dfrac{\partial f_2^0}{\partial\lambda_0} & \dfrac{\partial f_2^0}{\partial\mu_0} \\ f_3 & \dfrac{\partial f_3^0}{\partial\lambda_0} & \dfrac{\partial f_3^0}{\partial\mu_0} \end{vmatrix} = -n\,\Psi^r(\lambda_0,\mu_0;\lambda_0,\mu_0;\lambda,\mu). \end{array}\right.$$

(De ces équations la première est du degré $n-2$, la seconde du degré $2(n-2)$ en $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$; la première du degré $2(n-2)$, la seconde du degré $n-2$, en $\frac{\lambda}{\mu}$; si l'on élimine une de ces quantités, par exemple $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ on obtient une équation du degré $5(n-2)^2$ en $\frac{\lambda}{\mu}$; mais cette équation contient toute une série de facteurs étrangers à la question.

Tout d'abord, d'après une remarque faite par Abel à propos d'équations analogues, le résultat de l'élimination est divisible par : $\Psi^r(\lambda,\mu;\lambda,\mu;\lambda,\mu)$, c'est à dire par Δ, le quotient de la division par Δ est de degré $5(n-2)^2-3(n-2)$; puis il est divisible par la quantité $\psi(\lambda,\mu)$ qui égalée à zéro donne les paramètres des points doubles, car les équations (18) sont vérifiées en même temps que les équations (11) ; le facteur qui reste alors est de degré :

$$5(n-2)^2-3(n-2)-(n-1)(n-2)=4(n-2)(n-3).$$

Mais ce nombre subit encore une réduction, s'il y a des points de rebroussement. Les équations (18) sont visiblement encore satisfaites, si $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ et $\frac{\lambda}{\mu}$ correspondent à 2 points de rebroussement différents, et aussi, si $\frac{\lambda}{\mu}$ correspond à un point de rebroussement, $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ au point de contact d'une tangente à la courbe issue de ce point de rebroussement ; donc à la valeur $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ qui correspond à un point de rebroussement, on peut associer $\chi-1+2n-5-\chi$ valeurs de $\frac{\lambda}{\mu}$, qui satisfont à l'équation restante ; chaque valeur semblable de $\frac{\lambda}{\mu}$ est ainsi racine multiple d'ordre $2n-6$ de l'équation. Et chaque valeur de $\frac{\lambda}{\mu}$ qui correspond à une tangente issue d'un point de rebroussement, vérifie aussi cette équation. Donc cette équation a encore

2 facteurs étrangers, respectivement de degrés

$$\chi\ (2n-6) \text{ et } \chi\ (2n-5-\chi),$$

et après division par ces facteurs, il restera une équation du degré

$$4\ (n-3)\ (n-2-\chi) + \chi\ (\chi-1)$$

Le nombre des tangentes doubles est donc :

$$2\ (n-3)\ (n-2-\chi) + \frac{\chi\ (\chi-1)}{2},$$

et comme deux racines associées de l'équation qui vient d'être établie, peuvent, (en vertu des équations (18)) être exprimées rationnellement en fonction l'une de l'autre, on trouvera ces tangentes doubles au moyen d'une équation de degré :

$$2\ (n-3)(n-2-\chi) + \frac{\chi\ (\chi-1}{2}$$

et les points de contact de chacune d'elles par une équation du 2ème degré.

Ces nombres qui viennent d'être donnés concordent avec ceux qui résultent des équations de Plücker

Mais il n'est pas sans intérêt d'avoir montré, par la voie que nous avons suivie, comment l'on peut former effectivement les équations qui donnent ces singularités, et les résoudre au moyen d'équations de degré aussi réduit que possible.

La courbe (1) est bien réellement la plus générale qui ait $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles, on le voit de la manière suivante :

Les équations (1) contiennent $3n+3$ constantes arbitraires que l'on peut ramener à $3n-1$ par une transformation homographique

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{p\lambda' + q\mu'}{r\lambda' + s\mu'},$$

mais

$$3n-1 = \frac{n\ (n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

[illegible] exactement le nombre de conditions nécessaires pour déterminer la courbe de degré n, et le nombre de conditions qu'entraîne l'existence du nombre exigé de points doubles. Le nombre des constantes arbitraires est donc justement égal au nombre des conditions auxquelles la courbe la plus générale de cette nature peut encore être assujettie.

§ 7.

Le théorème d'Abel et le problème des fonctions abéliennes dans le cas où les intégrales sont exprimables par des fonctions algébriques et logarithmiques.

Dans la suite, je supposerai $\mu = 1$ n'ayant plus besoin de différentier par rapport à μ. En même temps je désigne par $a_1, b_1 ; a_2 b_2 ; a_\nu, b_\nu ;$ $(\nu = \frac{(n-1)(n-2)}{2})$ les couples de valeurs de λ correspondant aux points doubles.[1]

Pour trouver les points d'intersection de la courbe et d'une courbe de degré m

$$(19) \qquad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

je forme l'équation en λ en remplaçant les x par leurs valeurs tirées de (1):

$$(20) \qquad \Omega(\lambda) \equiv c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_{mn}) = 0$$

$$\equiv \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{mn}$ correspondant aux mn points d'intersection.

Si dans cette équation nous remplaçons λ, une fois par a_i, une autre fois par b_i, alors les x demeurent inaltérés à un facteur près c_i, et de même Ω et φ ne changent pas, à un facteur près $(c_i)^m$, et l'on obtient:

$$\Omega(a_i) = (c_i)^m \, \Omega(b_i)$$

ou

$$(21) \qquad \frac{(a_i - \lambda_1)(a_i - \lambda_2) \ldots (a_i - \lambda_{mn})}{(b_i - \lambda_1)(b_i - \lambda_2) \ldots (b_i - \lambda_{mn})} = (c_i)^m.$$

Cette équation, où l'indice i peut prendre ν valeurs, est de la plus haute importance pour la théorie des courbes en question.

Elle joue pour ces courbes le même rôle que celles que j'ai déduites du théorème d'Abel dans le cas général (même journal, tome 68, page 189).

Les ν équations (21) remplacent les ν relations qui expriment que mn points de la courbe forment l'intersection complète de cette courbe et d'une courbe de degré m, et il en résulte le théorème:

---

[1] On suppose d'abord que la courbe n'a pas de rebroussements.

Pour que m n points de la courbe soient sur une courbe de degré m il faut et il suffit que leurs paramètres satisfassent aux équations (21).

L'équation (21) subit une légère modification quand un point double devient un point de rebroussement.

On a alors $a_i = \alpha_i$, $b_i = \alpha_i + \varepsilon$, $c_i = 1 - \gamma^2 \varepsilon$ où ε est infiniment petit, donc

$$\frac{a_i - \lambda}{b_i - \lambda} = 1 - \frac{\varepsilon}{\alpha_i - \lambda} + \ldots$$

l'équation (21) devient alors

$$(22) \qquad \frac{1}{\alpha_i - \lambda_1} + \frac{1}{\alpha_i - \lambda_2} + \ldots\ldots \frac{1}{\alpha_i - \lambda_{mn}} = m\,\gamma_i$$

D'après ce qu'on a vu à l'endroit cité, page 197, on peut former des [illegible] et pour trouver ces sommes, il suffit de prendre la dérivée logarithmique des équations (21), on la dérivée des équations (22), puis d'intégrer respectivement de ρ_i à λ, ou de σ_i à λ.

A la place de (21) et (22) nous avons alors :

$$(23) \qquad \int_{\rho_i}^{\lambda_1} \frac{(a_i - b_i)\,d\lambda}{(a_i - \lambda)(b_i - \lambda)} + \ldots\ldots + \int_{\rho_i}^{\lambda_{mn}} \frac{(a_i - b_i)\,d\lambda}{(a_i - \lambda)(b_i - \lambda)} = 0$$

$$\int_{\sigma_i}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\alpha_i - \lambda} + \ldots\ldots + \int_{\sigma_i}^{\lambda_{mn}} \frac{d\lambda}{\alpha_i - \lambda} = 0$$

[illegible] 22, par les égalités :

$$(24) \qquad \frac{c_i - \rho_i}{b_i - \rho_i} = (c_i)^{\frac{1}{n}} \qquad \frac{1}{\alpha_i - \sigma_i} = \frac{\gamma_i}{n}$$

Par un certain changement du chemin d'intégration, comme les intégrales admettent la période $2i\pi$, on peut remplacer au second membre de la première équation zéro par $2mi\pi$; les intégrales de la seconde équation ont toujours un module de périodicité nul, parce qu'elles ont chacune 2 points de discontinuité qui coïncident. Ce qui s'accorde avec ce fait que l'on peut remplacer $(c_i)^m$ par $(c_i)^m e^{2hi\pi}$ dans l'équation (21) tandis que dans (22) $m\,\gamma_i$ ne peut être remplacé par rien d'autre.

On peut donc énoncer le théorème

Pour une courbe du degré n, possédant $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles, ou

de rebroussement, en représentant par $a_i\ b_i$ le paramètre d'un point double, la somme :

$$\Sigma \int_{\zeta}^{\lambda} \frac{(a_i - b_i)\, d\lambda}{(a_i - \lambda)(b_i - \lambda)}$$

est égale à $2 h i \pi$, et, en représentant par α_i le paramètre d'un point de rebroussement, la somme

$$\Sigma \int_{\zeta}^{\lambda} \frac{d\lambda}{(\alpha_i - \lambda)^2}$$

est nulle, en étendant la somme Σ à tous les paramètres des points d'intersection de la courbe avec une courbe algébrique. (1)

Il résulte de là que tous les problèmes que j'ai résolus à l'endroit indiqué par la division des transcendantes abéliennes, se ramènent, pour les courbes considérées à la division d'arcs de cercle, et à la résolution d'une équation de degré ν.

En réalité ceci se prouve directement au moyen des équations 21, 22; dans tous ces problèmes on s'est donné en effet $mn - \mu\nu$ points d'intersection, tandis que ceux qui restent forment ν groupes de μ points confondus. (2)

Désignons les paramètres donnés correspondant aux premiers points, par $l_1, l_2 \ldots l_{mn-\mu\nu}$ et ceux des points cherchés par $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu$, les équations (21) se transforment en :

$$(24^{bis}) \quad \begin{cases} \dfrac{(a_i - \lambda_1)(a_i - \lambda_2)\ldots(a_i - \lambda_\nu)}{(b_i - \lambda_1)(b_i - \lambda_2)\ldots(b_i - \lambda_\nu)} = e^{\frac{2 h_i \Sigma_1 \pi}{\mu}} \sqrt[\mu]{\dfrac{(b_i - l_1)(b_i - l_2)\ldots(b_i - l_{mn-\mu\nu})}{(a_i - l_1)(b_i - l_2)\ldots(a_i - l_{mn-\mu\nu})}} \\ -\dfrac{1}{\alpha_i - \lambda_1} + \dfrac{1}{\alpha_i - \lambda_2} + \cdots + \dfrac{1}{\alpha_i - \lambda_\nu} = \dfrac{1}{\mu}\left\{ m\gamma_i - \dfrac{1}{\alpha_i - l_1} - \cdots - \dfrac{1}{\alpha_i - l_{mn-\mu\nu}} \right\} \end{cases}$$

---

(1) L'intégrale $\int_{\zeta}^{\lambda} \frac{(a_i - b_i)\, d\lambda}{(a_i - \lambda)(b_i - \lambda)}$ est une intégrale de 3me espèce ayant pour points critiques logarithmiques les deux points de la courbe unicursale, superposés au point double a_i, b_i.

L'intégrale $\int_{\zeta}^{\lambda} \frac{d\lambda}{(\alpha_i - \lambda)^2}$ est une intégrale de deuxième espèce ayant pour pôle du premier ordre le point de rebroussement α_i.

Les relations indiquées par Clebsch sont alors des cas particuliers du théorème d'Abel.

---

(2) Ces problèmes peuvent s'énoncer comme il suit : par $mn - \mu\nu$ points donnés pris sur la courbe unicursale, faire passer une courbe d'ordre

ces égalités au nombre de ν, suffisent entièrement pour former les fonctions symétriques des λ, au moyen de quantités connues, et par suite pour former l'équation aux λ, du degré ν;

On remarque que l'effet d'un point de rebroussement, c'est de faire disparaître une des ν périodes; lorsque, (comme cela peut encore arriver pour les courbes du 4ème degré) tous les points doubles deviennent des points de rebroussement, on n'a plus besoin de la division d'arcs de cercle

Le problème de l'inversion se rapportant à cette question est contenu dans les équations:

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{(x-a_1)(x-b_1)} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

dont quelques-unes peuvent être suppléés par des équations de la forme

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{(x-\lambda)^2} = \nu_i$$

qui résultent de la précédente en remplaçant a_i par α_i; b_i par $\alpha_i + \varepsilon$, u_i par $-\varepsilon\nu_i$.

La solution du problème de l'inversion est alors donnée par les équations $(\nu = \frac{(n-1)(n-2)}{2})$

$$\frac{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_\nu)}{(\beta_1-\lambda_1)(\beta_1-\lambda_2)\cdots(\beta_1-\lambda_\nu)} = e^{u_1\left(\frac{x-\rho}{\beta_1-\rho}\right)^\nu}$$

seulement, quand le point double $a_i\,b_i$ est un point de rebroussement α_i, cette équation est à remplacer par

$$\frac{1}{\alpha_i-\lambda_1} + \cdots\cdots \frac{1}{\alpha_i-\lambda_\nu} = \nu_i + \frac{\nu}{\alpha_i-\sigma_i}$$

$$= \nu_i + \frac{\nu}{\rho}\,\gamma_i$$

les quantités $\underline{c}$, et par conséquent aussi les ρ s'expriment facilement au moyen de a, b. On n'a qu'à remarquer que, si l'on met à part un point double, ceux qui restent forment l'intersection complète de la courbe du degré $\underline{n}$ et de la courbe du degré $n-3$, que l'on peut mener par ces

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 = \frac{n(n-3)}{2}$$

---

en ayant en ν points à déterminer, un contact d'ordre $\mu-1$ avec la courbe unicursale. Voyez § 8.

points doubles; si l'on fait donc dans l'équation (21) $m = n-3$, on peut en même temps substituer aux $n(n-3)$ grandeurs λ, les $n(n-3)$ valeurs a, b, qui n'ont pas l'indice (i).

On a ainsi, en désignant pour abréger par:

$$(28) \qquad \varphi(z) \text{ le produit } (z-a_1)(z-a_2)\cdots\cdots(z-a_\nu)$$
$$\text{et } \psi(z) \qquad\qquad (z-b_1)(z-b_2)\cdots\cdots(z-b_\nu)$$

l'équation (29)

$$(29) \qquad (c_i)^{n-3} = -\frac{\varphi'(a_i)\cdot\psi(a_i)}{\psi'(b_i)\cdot\varphi(b_i)}.$$

Cherchons maintenant dans quelles circonstances les quantités u_i forment un système tel que chacune soit égale à une somme de $\nu-1$ intégrales (25) seulement. Dans ce cas, à la place des équations (27) il faudra prendre l'égalité

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{(a_i-\lambda_1)(a_i-\lambda_2)\cdots(a_i-\lambda_{\nu-1})}{(b_i-\lambda_1)(b_i-\lambda_2)\cdots(b_i-\lambda_{\nu-1})} = e^{u_i}\cdot(c_i)^{\frac{\nu-1}{n}} = e^{u_i}(c_i)^{\frac{n-3}{2}} \\ \qquad = e^{u_i}\sqrt{-\dfrac{\varphi'(a_i)\cdot\psi(a_i)}{\psi'(b_i)\cdot\varphi(b_i)}} = \xi_i \ , \end{cases}$$

ce qui fait $\nu-1$ équations entre lesquelles on doit éliminer les fonctions symétriques élémentaires des λ, et le résultat de l'élimination est l'égalité

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} (a_1)^{\nu-1} - \xi_1 b_1^{\nu-1} & a_1^{\nu-2} - \xi_1 b_1^{\nu-2} & \cdots\cdots & 1-\xi_1 \\ (a_2)^{\nu-1} - \xi_2 b_2^{\nu-1} & a_2^{\nu-2} - \xi_2 b_2^{\nu-2} & \cdots\cdots & 1-\xi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_\nu)^{\nu-1} - \xi_\nu b_\nu^{\nu-1} & a_\nu^{\nu-2} - \xi_\nu b_\nu^{\nu-2} & \cdots\cdots & 1-\xi_\nu \end{vmatrix} = 0$$

si on ordonne cette équation suivant les ξ, et si on les remplace par les équations 30; alors on obtient une équation linéaire par rapport à chacune des quantités e^u; si l'on désigne ces quantités dans un ordre quelconque par les indices $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_i$; $\beta_{i+1}\ \beta_{i+2} \cdots \beta_\nu$, il est facile de montrer que dans le développement de (31) les deux quantités:

$$e^{u_{\alpha_1}+u_{\alpha_2}+\cdots u_{\alpha_i}}$$
$$\text{et} \qquad e^{u_{\beta_{i+1}}+u_{\beta_{i+2}}+\cdots u_{\beta_\nu}}$$

entrent avec des coefficients égaux, mais de signes contraires, si bien que l'équation 31 peut s'écrire:

$$(32) \qquad 0 = \sum C_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i}\left[e^{u_{\alpha_1}+u_{\alpha_2}+\cdots u_{\alpha_i}} - e^{S-u_{\alpha_1}-u_{\alpha_2}\cdots-u_{\alpha_i}}\right]$$

où S désigne la somme de tous les u.

En effet le coefficient de $\xi_{\alpha_1}\ \xi_{\alpha_2}\ \ldots\ \xi_{\alpha_i}$ dans le développement de 31 est égal à celui de $e^{u_{\alpha_1}+u_{\alpha_2}+\ldots+u_{\alpha_i}}$ multiplié par

$$\left(e_{\alpha_1}\ e_{\alpha_2}\ \ldots\ e_{\alpha_i}\right)^{\frac{n-3}{2}}$$

c'est à dire par

$$(33)\qquad \sqrt{(-1)^i\,\frac{\varphi'(a_{\alpha_1})\,\varphi'(a_{\alpha_2})\ldots\varphi'(a_{\alpha_i})\,\psi'(a_{\alpha_1})\,\psi'(a_{\alpha_2})\ldots\psi'(a_{\alpha_i})}{\varphi'(b_{\alpha_1})\,\varphi'(b_{\alpha_2})\ldots\varphi'(b_{\alpha_i})\,\psi'(b_{\alpha_1})\,\psi'(b_{\alpha_2})\ldots\psi'(b_{\alpha_i})}}$$

Or, en décomposant le déterminant (31) en sommes de déterminants, on voit que ce terme $\xi_{\alpha_1}\ \xi_{\alpha_2}\ \ldots\ \xi_{\alpha_i}$ a pour coefficient le produit par $(-1)^i$ de la quantité obtenue en remplaçant dans

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} a_1^{\nu-1} & a_1^{\nu-2} & \ldots & 1 \\ a_2^{\nu-1} & a_2^{\nu-2} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_\nu^{\nu-1} & a_\nu^{\nu-2} & \ldots & 1 \end{vmatrix} = (a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_\nu)\,(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_\nu)\ldots(a_{\nu-1}-a_\nu)$$

les $a_{\alpha_1}\ a_{\alpha_2}\ \ldots\ a_{\alpha_i}$ par les $\underline{b}$ qui ont même indice.

Le coefficient de

$$e^{S-u_{\alpha_1}-u_{\alpha_2}-u_{\alpha_i}} = e^{u_{\beta_{i+1}}+u_{\beta_{i+2}}+\ldots+u_{\beta_\nu}}$$

se trouve [illegible] précédent.

1° Parce qu'il y a $(-1)^{\nu-i}$ en facteur au lieu de $(-1)^i$

2° Parce que dans le déterminant (34) ce sont les $\underline{a}$ ayant l'indice β qui sont remplacés par les $\underline{b}$ de même indice.

3° Parce que dans le produit des $\underline{e}$ les indices β figurent partout au lieu des indices α.

Mais ce dernier produit peut se remplacer par celui de tous les $e^{\frac{n-3}{2}}$ divisé par l'expression (33)

Le quotient des deux coefficients ainsi formés doit être égal à 1. Désignons par Π un produit des différences, ce quotient a, d'après ce qui précède, la valeur :

$$\frac{\Pi(b_{\alpha_i}-b_{\alpha_k})\cdot\Pi(b_{\alpha_i}-a_{\beta_k})\cdot\Pi(a_{\beta_i}-a_{\beta_k})}{\Pi(a_{\alpha_i}-a_{\alpha_k})\cdot\Pi(a_{\alpha_i}-b_{\alpha_k})\cdot\Pi(b_{\alpha_i}-b_{\alpha_k})}\cdot\frac{1}{\Pi(a_{\alpha_i}-a_{\alpha_k})^2\cdot\Pi(a_{\alpha_i}-a_{\beta_k})\cdot\Pi(a_{\beta_i}-a_{\beta_k})}\cdot\Pi(a_{\alpha_i}-a_{\alpha_k})^2\cdot\Pi(a_{\alpha_i}-a_{\beta_k})\cdot\Pi(a_{\beta_i}-a_{\beta_k})\cdot\Pi(a_{\alpha_i}-a_{\alpha_k})\cdot\Pi(a_{\alpha_i}-b_{\alpha_k})\cdot\Pi(b_{\alpha_i}-b_{\alpha_k})\cdot\Pi(a_{\alpha_i}-a_{\alpha_k})^2\cdot\Pi(a_{\alpha_i}-a_{\beta_k})\cdot\Pi(a_{\beta_i}-a_{\beta_k})\cdot\Pi(a_{\alpha_i}-a_{\alpha_k})\cdot\Pi(a_{\alpha_i}-b_{\alpha_k})\cdot\Pi(b_{\alpha_i}-b_{\alpha_k})\cdot\Pi(a_{\alpha_i}-a_{\alpha_k})

mais soit A le produit des différences 2 à 2 de tous les α. B le produit des différences des β, ceci se ramène immédiatement à

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{1}{(c_1 c_2 \dots c_\nu)^{\frac{\nu-2}{2}}}$$

et ceci est bien égal à 1, comme il est facile de le voir, car le produit de tous les c^{n-3} est $\frac{A^2}{B^2}$, donc celui des $c^{\frac{n-3}{2}}$ est $\frac{A}{B}$ pourvu que l'on prenne une combinaison convenable des signes devant les radicaux.

Nous avons donc le Théorème.

Pour qu'un système de ν grandeurs u_i soit égal à des sommes de $\nu-1$ intégrales seulement, il faut et il suffit qu'il y ait entre les u la relation 31 ou 32.

En particulier si tous les u sont des multiples entiers de $i\pi$, tous les e^u sont égaux à ± 1, et l'équation (32) se réduit alors à

$$e^{S} = 1 \tag{35}$$

c'est à dire.

La somme de tous les u est un multiple entier pair de $i\pi$.

Reste à chercher les modifications qu'il faut apporter à ces considérations quand quelques points doubles deviennent des points de rebroussement ; pour ce qui regarde la détermination des c correspondant aux véritables points doubles, tout ce qui, dans les formules (29) provient des points de rebroussement disparaît et il suffit de supprimer de φ et ψ tous les facteurs répondant aux véritables points de rebroussement.

Les γ se déterminent au moyen des formules 22, comme les c au moyen des formules 21, et l'on trouve ainsi, en faisant

$$\chi(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots \tag{36}$$

la formule 37.

$$\gamma_i = \frac{1}{n-2}\left\{ \frac{\chi''(\alpha_i)}{2\chi'(\alpha_i)} + \frac{\varphi'(\alpha_i)}{\varphi(\alpha_i)} + \frac{\psi'(\alpha_i)}{\psi'(\alpha_i)} \right\} \tag{37}$$

Si maintenant l'on subtitue

$$\begin{aligned} -\varepsilon v_i &\quad \text{pour } u_i \\ 1-\varepsilon\gamma_i &\quad \text{---} \quad c_i \\ \alpha_i &\quad \text{---} \quad a_i \\ \alpha_i + \varepsilon &\quad \text{---} \quad b_i \end{aligned}$$

et si l'on fait tendre ε vers zéro, à la place de la suite correspondante

$$\alpha^{\nu-1}\beta^{1}, \quad \alpha^{\nu-2}\beta^{2}, \quad \ldots \quad \alpha\beta^{\nu-1}, \quad \beta^{\nu}$$

dans (31), figure toujours une suite de la forme :

$$\mathcal{L}^{\nu-1} - \theta\mathcal{L}^{\nu-1}, \quad 2\mathcal{L}^{\nu-3} - \theta\mathcal{L}^{\nu-2}, \quad \ldots \quad (\nu-1)-\theta\mathcal{L}, \quad -\theta$$

où (38)
$$\mathcal{L} = \nu_i + \frac{n-2}{2}\gamma_i$$

en particulier si les ν sont tous nuls et les u des multiples entiers de $i\pi$, il résulte de (35) que en même temps, la somme de tous les u correspondant aux points doubles doit être un multiple pair de $i\pi$.

---

§. 3

Résultats géométriques.

Après ces préliminaires généraux, il est facile d'indiquer quelles modifications subit, dans le cas étudié, la solution du problème énoncé à l'endroit cité.

La solution de ces problèmes s'appuie toujours sur les équations (30), (31).

$$\left\{ \frac{(\alpha_1-\lambda_1)(\alpha_1-\lambda_2)\cdots(\alpha_1-\lambda_{n-2})}{(\alpha_i-\lambda_1)(\alpha_i-\lambda_2)\cdots(\alpha_i-\lambda_{n-2})} = (-1)^{n} \right.$$

$$\left\{ \frac{1}{\alpha_1-\lambda} + \frac{1}{\alpha_2-\lambda} + \cdots + \frac{1}{\alpha_i-\lambda} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n-\lambda} = 0 \right.$$

la première équation ayant lieu pour :

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \varkappa \text{ valeurs de } i,$$

la seconde, pour $\varkappa$ valeurs correspondant aux points de rebroussement.

I. Si $m \geqslant n-2$, on peut toujours résoudre ce problème :

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \varkappa$$

points étant pris sur une courbe de degré n, mener par ces points une courbe du degré m, qui ait en ν points un contact d'ordre $(r-1)$ (r points confondus avec la première).

Si nous nous donnons m $n-\nu r$ grandeurs λ, il en reste νr, qui doivent coïncider par groupes de r ; soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les paramètres

correspondant aux points de contact, les égalités 39 nous fournissent les expressions:

$$\left[\frac{(a_i-\lambda_1)(a_i-\lambda_2)\cdots(a_i-\lambda_\nu)}{(b_i-\lambda_1)(b_i-\lambda_2)\cdots(b_i-\lambda_\nu)}\right]^r$$

et

$$r^\nu\left[\frac{1}{a_i-\lambda_1}+\frac{1}{a_i-\lambda_2}+\cdots+\frac{1}{a_i-\lambda_\nu}\right].$$

et une équation du degré ν nous fournira les λ.

Ces premières expressions se déterminent par l'extraction d'une racine $r^{ième}$, opération qu'il faudra répéter $\nu-\chi$ fois; donc le nombre total des solutions du problème est $r^{\nu-\chi}$

Désignons les paramètres donnés par $l_1, l_2 \ldots l_{m n-\nu_r}$. Les équations dont nous tirerons les λ, sont alors:

$$e^{\frac{2h_i\sqrt{-1}\pi}{r}} c_i^{\frac{m}{r}} = \frac{(a_i-\lambda_1)(a_i-\lambda_2)\cdots(a_i-\lambda_\nu)}{(b_i-\lambda_1)(b_i-\lambda_2)\cdots(b_i-\lambda_\nu)}\sqrt[r]{\frac{(a_i-l_1)(a_i-l_2)\ldots}{(b_i-l_1)(b_i-l_2)\ldots}}$$

$$\frac{m}{r}\gamma_i = \frac{1}{a_i-\lambda_1}+\frac{1}{a_i-\lambda_2}+\cdots+\frac{1}{a_i-\lambda_\nu}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_i-l_1}+\frac{1}{a_i-l_2}\cdots+\frac{1}{a_i-l_{m n-\nu r}}\right)$$

Imaginons que nous ayons écrit ces équations pour r systèmes différents de solutions, et multiplions dans les premières équations les premiers membres entre eux, et pour les secondes ajoutons les premiers membres. si maintenant la somme des h correspondant aux divers systèmes est divisible par r, (résultat que l'on peut toujours obtenir par un choix convenable de h pour le dernier système) les équations qui en résultent exprimeront que les r systèmes de points de contact, avec les points donnés sont sur une courbe du degré m.

On a donc le théorème:

Quand par les points donnés et par les points de contact de $\nu-1$ courbes tangentes différentes on fait passer une courbe de degré m, cette courbe coupe en outre la courbe donnée en des points qui sont aussi sur une courbe de contact.

D'ailleurs, dans cet énoncé ces $r-1$ courbes que nous employons peuvent être supposées ou bien toutes différentes, ou bien quelques-unes peuvent être confondues; seulement dans ce dernier cas la courbe de degré m doit avoir avec la courbe donnée un certain nombre de contacts convenables.

II. Supposons qu'au lieu de $m n-\nu r$ points, nous ne nous soyons

donné que $mn-(\mu+\nu)r$ points, μr parmi ceux qui restent devant former μ groupes de r points confondus, alors le problème ci-dessus est résolu et l'on obtient des systèmes de courbes du degré m, passant par $mn-(\mu+\nu)r$ points de la courbe donnée et ayant, en $\mu+\nu$ points un contact d'ordre $r-1$ avec cette courbe.

Ces différents systèmes se distinguent parce que dans la détermination des expressions

$$\frac{(\alpha_i-\lambda_1)(\alpha_i-\lambda_2)\cdots\cdots(\alpha_i-\lambda_{\mu+\nu})}{(\beta_i-\lambda_1)(\beta_i-\lambda_2)\cdots\cdots(\beta_i-\lambda_{\mu+\nu})},$$

on emploie des racines $r^{\text{ièmes}}$ de l'unité différentes ; le nombre total des systèmes est donc $r^{\nu-\varkappa}$. Le théorème précédemment démontré pour les points de contact subsiste.

III. Enfin $mn-(\mu+\nu)r$ peut être nul de telle sorte que les systèmes de courbes tangentes ne dépendent plus que de la nature même de la courbe donnée. Le théorème précédent sur la position des points de contact est toujours vrai, mais le nombre des systèmes peut se réduire, quand on exclut tous ceux dont les courbes consistent en courbes de degré inférieur comptées plusieurs fois ; d'après les considérations du paragraphe 6 de la note déjà citée, modifiées conformément à la méthode indiquée ici aux numéros I et II, quand $m=m's$, et $r=r's$, m' et r' étant premiers entre eux, le nombre des systèmes véritables est $r^{\nu-\varkappa}-r'^{\nu-\varkappa}$, et c'est seulement si m et r sont premiers entre eux que le nombre de ces systèmes est $r^{\nu-\varkappa}$.

IV. Dans ce qui précède on a toujours supposé $m \geq n-2$. Pour $m=n-3$ se présente le problème :

La courbe du degré n, doit en tous les points où elle rencontre une courbe de degré $n-3$ (c'est-à-dire en $n\frac{(n-3)}{2}$ points) avoir un contact simple avec cette courbe.

Dans ce cas les équations (39) ont la forme

$$\frac{(\alpha_i-\lambda_1)(\alpha_i-\lambda_2)\cdots\cdots(\alpha_i-\lambda_{\nu-1})}{(b_i-\lambda_1)(b_i-\lambda_2)\cdots\cdots(b_i-\lambda_{\nu-1})} = c_i^{\frac{n-3}{2}} e^{h_i\sqrt{-1}\,\pi}$$

$$\frac{1}{\alpha_i-\lambda_1}+\frac{1}{\alpha_i-\lambda_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_i-\lambda_{\nu-1}}=\frac{n-3}{2}\gamma_i,$$

Le nombre des équations dépasse d'une unité celui des inconnues λ,

mais on se trouve en présence du cas traité à la fin du paragraphe 2, où toutes les grandeurs $c^{(i)}$ étaient égales à ± 1 et tous les v_i nuls. Pour que ces équations soient compatibles, il n'y a donc qu'une condition à remplir, c'est que la somme des b soit paire. Ce qui détermine le dernier b, les autres étant pris arbitrairement.

Le nombre des courbes de contact est donc : $2^{\nu-\chi-1} = 2^{\frac{n(n-3)}{2}-\lambda}$

Cette manière de compter ne donne pas un résultat exact dans le cas seulement, où elle donnerait un exposant négatif, c.à.d. si tous les points doubles étaient des points de rebroussement. Ce qui ne peut avoir lieu que pour les courbes du 3ème ou du 4ème degré, puisque le nombre λ des points de rebroussement ne peut dépasser $\frac{3}{2}(n-2)$. Il n'y a pas lieu de se proposer le problème pour les courbes du 3ème degré. Il ne reste à examiner que le cas des courbes du 4e degré ayant 3 points de rebroussement, et au dénombrement ci-dessus, il faut ajouter le résultat connu que ces courbes ont une tangente double.

Sur la situation des points de contact et les relations entre les courbes, qui ont partout avec la courbe donnée un contact simple, on trouve facilement des théorèmes comme dans la note citée.

Je me contente, pour terminer, d'indiquer quelques résultats spéciaux pour les courbes du 3ème et du 4ème degrés.

Une courbe du 3ème degré avec un point double possède un seul système de coniques touchant la courbe en trois points ; si par les 3 points de contact on fait passer une conique, les 3 autres points d'intersection sont aussi les points de contact d'une conique. De même il y a deux systèmes de cubiques osculatrices à la première en 3 points, et 3 droites qui ont un contact double (points d'inflexion).

Si le point double devient un point de rebroussement, il y a encore un système de coniques de contact, plus de systèmes de cubiques triplement osculatrices, une seule tangente d'inflexion.

Une courbe du 4ème degré, ayant 3 points doubles, a 4 tangentes doubles dont les 8 points de contact sont sur une conique ; il y a sept systèmes de coniques qui la touchent en 4 points ; les 8 points de contact de 2 coniques du même système sont sur une conique. Trois de ces systèmes contiennent chacun deux paires de tangentes doubles et peuvent en être déduits ; les quatre qui restent ne contiennent pas de tangentes doubles. Il y a aussi 8 systèmes de cubiques qui touchent la courbe en 6 points, les 12 points de contact de 2 cubiques du même système sont sur une cubique. Quatre de ces systèmes ont la propriété que les six points de contact sont sur une conique passant par les deux points de contact d'une tangente double ; les autres n'ont pas cette propriété.

Il y a 26 Systèmes de courbes du 3e degré osculatrices en 4 points, etc

Si un point double devient point de rebroussement, on n'a plus que deux tangentes doubles, 3 systèmes de coniques 4 fois tangentes, dont un seul contient le couple de tangentes doubles ; 4 systèmes de cubiques tangentes en six points, dont 2 ont la propriété que les 6 points de contact d'une cubique et les 2 points de contact d'une tangente double sont sur une conique. Il y a 8 systèmes de cubiques, osculatrices en 4 points.

Avec 2 points de rebroussement, on n'a plus qu'une tangente double, un système de coniques 4 fois tangentes, en 4 points qui ne sont pas sur une conique passant par les points de contact de la tangente double.

Il y a 2 systèmes de cubiques tangentes en 6 points ; ces six points et les 2 points de contact de la tangente double sont sur une conique. Il y a 2 systèmes de cubiques osculatrices en 4 points, etc....

Enfin, avec trois points de rebroussement, il y a bien encore une tangente double, mais il n'y a plus de système de coniques 4 fois tangentes. Un seul système de cubiques tangentes en 6 points, ces six points et les points de contact de la tangente double étant sur une conique. Il n'y a plus de système de cubiques osculatrices en 4 points.

Giessen, le 28 Mai 1864.

Note. Des applications élémentaires de la méthode de Clebsch se trouvent dans la Géométrie analytique de Briot et Bouquet au fintitulé Notions sur les courbes unicursales.

A la même Librairie:

Acta Mathematica — *Journal rédigé par M. Mittag-Leffler.* — Tomes I à X ; le vol. ..... 25 fr. »
Tome X et suivants, le vol. ..... 18 fr. 75
Table des matières des tomes I à X des Acta mathematica ..... 2 fr. 50

Hermite. — *Cours professé à la Faculté des Sciences* — 4e Edition *recueilli par M. Hermite;* in 4°, 1891 ..... 15 fr. »

Duclaux (M.-S.). — *Cours de Physique et de Météorologie professé à l'Institut Agronomique.* gr. in-8°, 504 p., 175 fig. dont 44 en deux couleurs, 1891 ..... 7 fr. 50

Tumlitz (O.) — *Théorie électromagnétique de la lumière* — Traduction G. Van der Mensbrugghe, professeur à l'Université de Gand, membre de l'Académie royale de Belgique. Grand in-8°, XVI-157 p. 1892, nombreuses figures gravées ..... 5 fr. »

Despeyrous. — *Cours de Mécanique rationnelle, avec des notes par M. Darboux, de l'Institut.* — 2 forts vol. gr. in-8°, 1884-86 ..... 25 fr. »

Tannery, *Maître de Conférences et Sous-Directeur à l'Ecole Normale supérieure.* — Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Gr. in-8° de VIII-401 p. 1886 ..... 12 fr. »

Teixeira (F.) et Vannier (B.), *professeurs à la Faculté des Sciences de Lille.* — Introduction à la Physique expérimentale : Unités. — Calcul des erreurs. — Mesure des quantités primitives : longueurs, masses, temps. — 1 Vol. grand in-8°, 300 pages compactes, 68 figures gravées, 1888 ..... 4 fr. »

Bois-Reymond (Paul du). — Traduction P. Millhaud et A. Girot. — Théorie Générale des fonctions, in-8°, 221 pages, 1887. ..... 8 fr. »

Goursat (E.) — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* gr. in 8°, 1891 ..... 12 fr. »

Gruey. — *Exercices d'Astronomie, à l'usage des élèves des Facultés et des Observatoires.* 1 beau vol. gr. in 8° 346 p. 22 planches gravées, 1889 ..... 15 fr. »

Koenigs (G.), *Maître de Conférences à l'Ecole Normale Supérieure.* — Leçons de l'agrégation classique de mathématiques, In 4°, 1892, lith. ..... 10 fr. »

Descartes (R.). — La Géométrie. — Nouvelle édition, 1885, petit in-4° carré. ..... 4 fr. »

Duhem (P.) — *Cours de physique mathématique.* — Hydrodynamique, élasticité, acoustique. 2 vol. in-4°, lith., 1891, 1892, ens. 750 p. ..... 28 fr. »

Demartres. — *Cours d'analyse.* — Première partie : Fonctions variables réelles. In-4°, 1892 ..... 10 fr. »
Deuxième partie : Propriétés des fonctions analytiques, 1892. ..... 8 fr. »

Painlevé. — *Cours complémentaire de Mécanique rationnelle.* — Leçons sur l'intégration des équations de la Mécanique. — Exercices. In-4° 1891. — 300 pages ..... 14 fr. »

Koenigs (G.) — *Leçons de Cinématique, professées à la Faculté des Sciences de Paris.* Grand-in-8°. Nombreuses figures. .....

Paris. Imp. Hermet, 70, rue de Rennes, Paris.

QA
565
C514

Clebsch, Alfred
Sur les courbes planes dont les coordonnées sont fonctions rationelles d'un parametre

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY